第 5 卷(A 版)　第 7 期
2000 年 7 月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol. 5(A), No. 7
July 2000

基于迭代最近点的 B 样条曲线拟合方法研究

肖铁军　丁明跃　彭嘉雄
(华中理工大学图象识别与人工智能研究所"图象信息处理与智能控制"国家教委开放实验室, 武汉　430047)
(中国科学院自动化所模式识别国家重点实验室, 北京　100080)

摘　要　曲线拟合在图象处理、逆向工程应用等领域中有着重要意义. 由于对于 B 样条参数曲线拟合, 数据点的参数化直接影响着拟合的精度, 因此提出了一种基于迭代最近点的方法来优化修正数据点的参数, 并且证明了应用该方法进行曲线拟合具有局部收敛性. 通过实验分析, 验证了方法的正确性和鲁棒性.

关键词　B 样条　曲线拟合　迭代最近点　参数修正

中图法分类号: TP391　O182　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1006-8961(2000)07-0585-04

ICP-Based B-spline Curve Fitting

XIAO Yi-jun, DING Ming-yue, PENG Jia-xiong
(*Institute for Pattern Recognition & Artificial Intelligence, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan* 430074)
(*State Education Commission Laboratory for Image Processing and Intelligent Control*)
(*National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract　Curve fitting has been applied in many fields such as image processing and reverse engineering. In B-spline curve fitting, the parametrization of data points is a key problem. In this paper, an ICP-based algorithm to rectify the parameter values of data points is presented. The ICP algorithm always converges monotonically to the nearest local minimum. The proof of the convergence theorem is given. The analysis of experimental results demonstrates the validity and robustness of our algorithm.

Keywords　B-spline, Curve fitting, ICP(Iterative Closest Point), Parameter rectification

0　引　言

随着计算机技术和现代测量技术的高速发展, 在图象处理、逆向工程等应用中越来越多地需要从测量的数据点中获取最合适的曲线表达, 这就是所谓的曲线拟合问题. 国内外已经有许多学者对这一问题开展了研究, 并提出了各种不同的方法与算法. 其中最具代表性的有: Crossman 讨论了二维数据的多项式曲线拟合[1]; Clenshaw 和 Hayes 在加限制条件下使用最小二乘法进行多项式曲线和曲面拟合[2]; Gordon 和 Reisenfeld、Rogers 讨论了使用最小二乘法进行 B 样条曲线和曲面拟合[3,4]; Plass 和 Stone 使用埃尔米特基函数和 B 样条基函数进行曲线的多项式拟合[5], 并且讨论了如何使用曲线端点的几何性质限制; Rogers 和 Fog 提出了一种迭代修正数据点参数的方法[6], 并且采用人工约束来增强结果的准确性. 但是在文献[6]中并没有进行迭代收敛性的证明, 而只是从实验结果来说明方法的有效性.

本文对于 B 样条曲线拟合中的参数化问题, 提出了一种基于迭代最近点的修正数据点参数的方法, 并证明了在均方误差最小的意义上, 应用本方法进行曲线拟合具有局部收敛性. 还结合使用传统参数化方法的结果来确定初始值, 获得了令人满意的实验结果.

基金项目: 国家自然科学基金(69775005); 国家教委跨世纪优秀人才基金
收稿日期: 1999-06-17; **改回日期**: 2000-03-28

1 最小二乘B样条曲线拟合

给定一个非递减的序列 $\boldsymbol{U}$: $u_0 \le u_1 \le \cdots \le u_{n+k+1}$, $\boldsymbol{U}$ 为节点向量. B样条基函数定义如下:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & 若\ u_i \le t < u_{i+1} \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{u_{i+k+1} - t}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \tag{1}$$

其中 k 为B样条的阶数, 进一步定义B样条曲线的参数方程

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{d}_i N_{i,k}(t) \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{d}_i$ 表示B样条曲线的控制点坐标向量.

如果数据点集 $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{p}_j:\ j = 1, 2, \cdots, r\}$ 在B样条曲线上, 点 $\boldsymbol{p}_j$ 应满足方程(2), 于是有

$$\boldsymbol{p}_j(t_j) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{d}_i N_{i,k}(t_j), j = 1, 2, \cdots, r \tag{3}$$

将式(3)写成矩阵形式有

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{d} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是包含 r 个数据点的 $r \times 3$ 矩阵, $\boldsymbol{N}$ 是 $r \times n$ 的B样条基函数系数矩阵, $\boldsymbol{d}$ 是包含 n 个未知控制点的 $n \times 3$ 矩阵. 当 $k < n < r$ 时, 式(4)为一个过限制方程, 可以用最小二乘法求得近似解

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \tag{5}$$

可以证明[7], 在均方误差最小意义下式(5)的解是最优解. 即解出的控制点 $\boldsymbol{d}$ 形成的B样条曲线是最佳拟合曲线, 并使得参数为 $\{t_j\}$ 的B样条曲线采样点集到数据点集 $\boldsymbol{P}$ 的均方误差最小.

t_j 可通过对数据点的参数化得到. 常用的参数化方法有均匀参数化、弦长参数化、向心参数化、Foley参数化等等[8], 一般可根据数据点的分布状况和特性来决定.

2 基于迭代最近点的B样条曲线拟合

最小二乘B样条曲线拟合保证了拟合B样条曲线上参数为 $\{t_j\}$ 的采样点到对应数据点的均方距离最小, 但是参数为 $\{t_j\}$ 的点并不一定是B样条曲线上离数据点最近的点, 即数据点集到拟合B样条曲线的均方距离不一定最小. 为了解决这一问题, 文献[6]提出了一种迭代修正数据点参数的方法. 它首先定义一个数据点到采样点的距离误差, 并将这个误差进行一阶泰勒展开, 然后用最速下降法求出修正的参数变化量, 最后用新的参数进行B样条曲线拟合, 经过若干次迭代后, 数据点到采样点的距离误差能够逐步减小. 但是由于误差目标函数的性态难以分析和确定, 文献[6]并没有给出收敛性的证明. 在文献[9]中也提到了用迭代的方法来修正B样条曲线的参数, 但是也没有给出具体的修正方法, 只是笼统地说这种迭代方法偶尔地(occasionally)不收敛.

为了克服这一问题, 本文提出了一种基于迭代最近点修正数据点集参数的方法, 并且证明了应用这种方法进行曲线拟合具有局部收敛性. 下面首先给出最近点和最近点距离的定义.

定义1 最近点和最近点距离

设 C 为一条参数化的B样条曲线, 则点 $\boldsymbol{p}$ 到 C 的最近点距离为

$$d(\boldsymbol{p}, C) = \min_{c_v \in C} \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}_v\| \tag{6}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示向量的2-范数. 满足最近点距离的点称为 $\boldsymbol{p}$ 在 C 中的对应最近点.

基于迭代最近点的B样条曲线拟合和修正参数的具体步骤如下:

(1) 利用普通最小二乘法进行B样条曲线拟合

① 对数据点进行参数化, 得到数据点集 $\boldsymbol{P}$ 的参数 $\boldsymbol{T}^0 = \{t_j^0 : j = 1, 2, \cdots, r\}$, 并设迭代次数 $q = 0$.

② 根据式(5)求取控制点 $\boldsymbol{D}^0 = \{\boldsymbol{d}_i^0:\ i = 1, 2, \cdots, n\}$, 得到B样条曲线 C^0.

③ 计算与参数 $\boldsymbol{T}^0 = \{t_j : j = 1, 2, \cdots, r\}$ 对应的B样条曲线点 $\boldsymbol{X}^0 = \{\boldsymbol{x}_j^0 : j = 1, 2, \cdots, r\}$, 进一步计算数据点集 $\boldsymbol{P}$ 与曲线点集 $\boldsymbol{X}^0$ 的均方差 d^0.

(2) 迭代修正B样条曲线参数

① 计算数据点集在 C^{q-1} 中的对应最近点集, 并将其对应最近点的参数作为该数据点的参数 $\boldsymbol{T}^q = \{t_j^q : j = 1, 2, \cdots, r\}$.

② 根据式(5)求取控制点 $\boldsymbol{D}^q = \{\boldsymbol{d}_i^q : i = 1, 2, \cdots, n\}$, 得到B样条曲线 C^q.

③ 计算与参数 $\boldsymbol{T}^q = \{t_j^q : j = 1, 2, \cdots, r\}$ 对应的B样条曲线点 $\boldsymbol{X}^q = \{\boldsymbol{x}_j^q : j = 1, 2, \cdots, r\}$, 进一步计算数据点集 $\boldsymbol{P}$ 与曲线点集 $\boldsymbol{X}^q$ 的均方差 d^q.

④ 返回至第①步, 直到 $\Delta d = |d^q - d^{q-1}| < \epsilon$. 其中 ϵ 为给定的门限.

可以证明, 以上算法是局部收敛的.

定理 1　迭代最近点算法以均方距离为目标函数单调收敛于局部极小值

证明

(1) 假设第 $q-1$ 次迭代得到的 B 样条曲线点集为 $\boldsymbol{C}^{q-1}$, 数据点集 $\boldsymbol{P}$ 在 $\boldsymbol{C}^{q-1}$ 中的最近点集为 $\boldsymbol{Y}^q=\{\boldsymbol{y}_j^q, j=1,2,\cdots,r\}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Y}^q$ 的均方距离为

$$\overline{e^q}=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\|\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{y}_j^q\|^2 \tag{7}$$

在第 q 次迭代中, 使用与 $\{\boldsymbol{y}_j^q\}$ 对应的参数 $\{t_j^q\}$ 代替数据点集的参数, 根据式(5)求取控制点 $\{\boldsymbol{d}_i^q\}$, 进而用控制点 $\{\boldsymbol{d}_i^{q+1}\}$ 和参数 $\{t_j^q\}$ 生成 B 样条曲线上的点 $\{\boldsymbol{x}_j^q\}$, 则数据点集 $\boldsymbol{P}$ 与 $\{\boldsymbol{x}_j^q\}$ 的均方距离为

$$\overline{d^q}=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\|\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{x}_j^q\|^2 \tag{8}$$

根据最小二乘原理, 总有 $\overline{d^q}\leq\overline{e^q}$. (因为由式(5)得出的最小二乘解能保证在参数 $\{t_j^q\}$ 上所得 B 样条曲线的点集与数据点集的均方差是最小的).

(2) 另一方面, 在第 $q-1$ 次迭代中, 数据点集 $\boldsymbol{P}$ 与 B 样条曲线参数为 $\{t_j^{q-1}\}$ 的点集 $\{\boldsymbol{x}_j^{q-1}\}$ 的均方距离为

$$\overline{d^{q-1}}=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\|\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{x}_j^{q-1}\|^2 \tag{9}$$

根据最近点的定义, 显然有 $\overline{e^q}\leq\overline{d^{q-1}}$.

根据(1)和(2)证明, 有 $\overline{d^q}\leq\overline{d^{q-1}}$. 因而算法的收敛性得证.

这也证明了基于迭代最近点的 B 样条曲线拟合方法是局部收敛的. 在定义 1 中没有给出最近点的求解方法, 下面给出一种数据点到 B 样条曲线最近点的数值解法.

设数据点 $\boldsymbol{p}_j$ 的参数为 t_j, 给定二个大小为 W 的参数窗口 $[t_{j-w}, t_j]$ 和 $[t_j, t_{j+w}]$. 在参数窗口中各进行 g 次均匀采样, 得到与采样参数对应的 B 样条曲线点集 $\boldsymbol{A}=\{a_h, h=1,2,\cdots,2g-1\}$. 则 $\boldsymbol{p}_j$ 到 B 样条曲线的最近点距离可近似为 $\boldsymbol{p}_j$ 到 $\boldsymbol{A}$ 的最近点距离, 即

$$d(\boldsymbol{p}_j, C)\approx d(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{A})=\min_{h=1,2,\cdots,2g-1}\|\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{a}_h\| \tag{10}$$

根据最近点的定义, 显然不等式 $\overline{e^q}\leq\overline{d^{q-1}}$ 也保持成立. 因此同理可证, 在这种近似最近点的情况下, 迭代修正算法也是收敛的.

3　实验分析

我们在 PⅡ-233 微机上使用 Matlab 实现了本文算法, 并进行了实验. 同时还将文献[6]方法的结果同本文方法结果进行了比较. 在图 1、图 2、图 3 中, “o”代表一条数字曲线上的原始数据点, 细线是进行二次 B 样条曲线拟合的结果, “*”代表了拟合 B 样条曲线的控制点. 由于数据点集是一条数字曲线, 所以需使用均匀参数化来确定数据点集的初始参数. 图 1 显示了最小二乘法的拟合结果(B 样条曲线的控制点为 6 个), 可以看出, 拟合的曲线是存在一定误差的. 图 2 和图 3 分别显示了文献[6]方法和本文方法的拟合结果(迭代次数为 60 次). 在实验时, 将采样窗

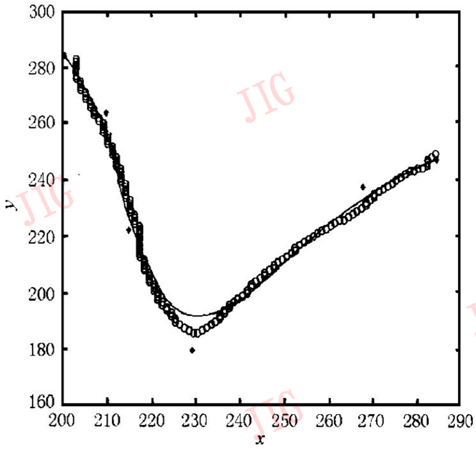

图 1　最小二乘法拟合结果

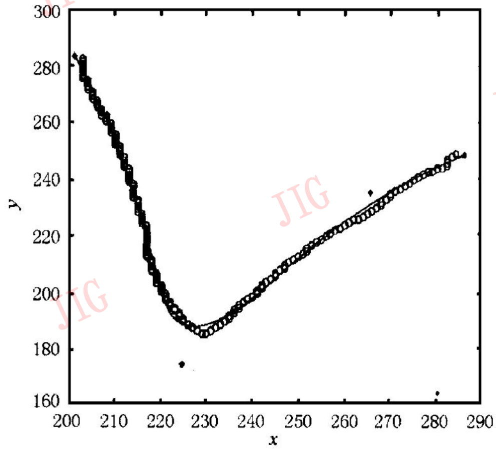

图 2　文献[6]方法拟合结果($q=5$)

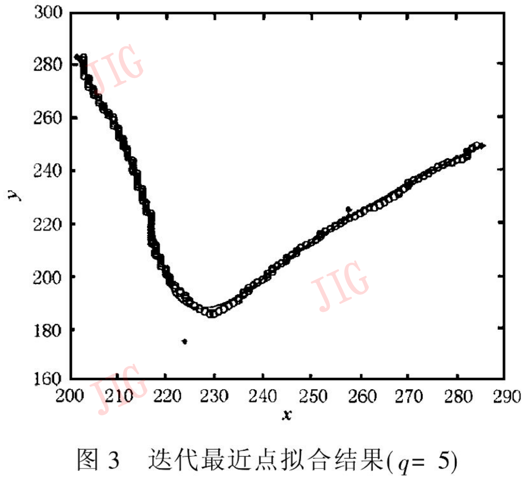

图 3　迭代最近点拟合结果($q=5$)

口大小设为 $W=5$, 采样点数 $g=100$. 拟合曲线均方误差 d^q 显示在图 4 中, 横轴为迭代次数, 纵轴为均方误差, "▽"代表了文献[6] 方法的均方误差, 细线代表了迭代最近点方法的均方误差. 可以看出, 迭代最近点方法的收敛性要优于文献[6] 的方法.

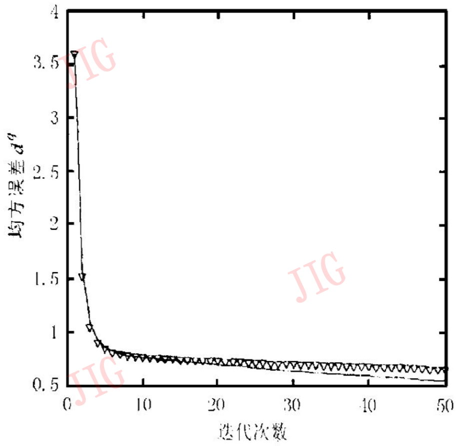

图 4　图 2 和图 3 拟合结果的均方误差

图 5 显示了对算法鲁棒性的测试结果. 测试数据为图 1 的原始数据加上了扰动(从右数第 10 点上加扰动), 图 5 的细线表示经过 21 次迭代后的拟合结果, 可以看出, 拟合结果是令人满意的. 而同样的测试数据在应用文献[6] 方法时, 则发生了参数修正溢出, 即修正的参数超出了参数节点区间的范围. 该实验表明, 本文所提出方法可以避免文献[6] 方法中所存在的对噪声敏感的问题, 从而保证能够收敛到局部极小值.

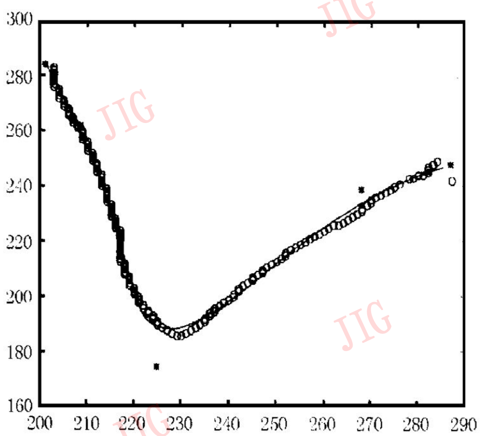

图 5

4　结　论

本文给出了一种迭代最近点 B 样条曲线拟合方法, 它基于以下二点考虑: (1) 通过寻找最近点集来修正数据点集参数, 减少数据点集到一条 B 样条曲线采样点集的均方距离; (2) 通过最小二乘法寻找最佳拟合曲线, 减少数据点集到 B 样条曲线采样点集的均方距离. 通过反复迭代, 使得最终数据点集到 B 样条曲线采样点集的均方误差最小. 同时还证明了这种方法具有局部收敛性. 通过使用经典最小二乘法的结果作为初始值, 本文方法取得了良好的效果. 实验分析说明, 本文方法具有良好的收敛性和鲁棒性.

参 考 文 献

1　Grossman G. Parametric curve fitting. Comput Journal, 1971, 14(2): 169～172.

2　Clenshaw C W, Hayes J C. Curve and surface fitting, J. Inst. Math. Appl., 1965, 1(2): 164～183.

3　Gordon W, Reisenfeld R. B-spline curves and surfaces, Computer Aided Geometric Design, In: Barnhill R E, Reisenfeld R F(eds)., Academic Press, New York, USA, 1974: 95～126.

4　Rogers D F. B-spline curves and surfaces for ship hull design, Proc. SNAME, SCAHD 77, 1st Int. Symp. Computer Aided Hull Surface Definition, Annapolis, MD, USA, Sept. 1977, 26～27.

5　Plass M, Stone M. Curve fitting with piecewise parametric cubics, Comput. Graph., 1983, 7(3): 229～239.

6　Rogers D F, Fog N G. Constrained B-spline curve and surface fitting, CAD, 1989, 21(10): 641～648.

7　薛家庆编. 最优化原理与方法. 北京: 冶金工业出版社, 1992, 121～126.

8　施法中著. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994, 45～50.

9　Pigel L. On NURBS: A Survey, IEEE Trans. on Computer Graphic & Application, 1991, 11(1): 55～71.

肖轶军　1972 年生, 华中理工大学图象识别与人工智能研究所博士研究生. 现主要从事计算机视觉、计算机图形学和图象分析方面的研究工作. 已在国际会议和国内重要期刊上发表论文 4 篇.

丁明跃　1961 年生, 华中理工大学图象识别与人工智能研究所副所长、教授、博士生导师. 主要研究领域包括计算机视觉、路径规划、目标识别和跟踪等. 已在国际会议和国内外重要期刊上发表论文 90 余篇.

彭嘉雄　1934 年生, 华中理工大学图象识别与人工智能研究所教授、博士生导师. 完成 863-409, 国家自然科学基金, 部、委攻关课题等 38 项. 已在国内外重要刊物上发表论文 170 余篇, 国外摘录收藏 79 篇, 论文和教学获奖 79 次.